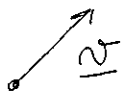
RICHIAMI ALGEBRA VETTORIALE

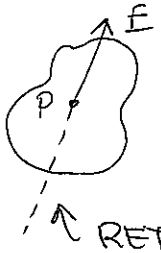
Vettore: strumento matematico, usato per descrivere delle grandezze vettoriali.

È definito da:



- MODULO: lunghezza vettore
- DIREZIONE: retta // al vettore.
- VERSO

Se abbiamo dei vettori applicati: **PUNTO DI APPLICAZIONE**.



(P, F)

(P)

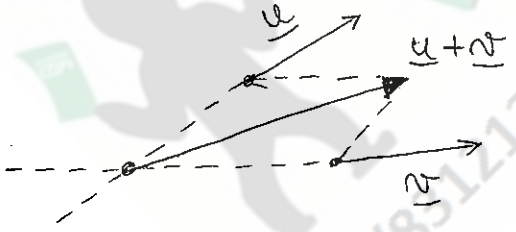
RETTA DI APPLICAZIONE: retta che passa per il punto di applicazione.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

OPERAZIONI

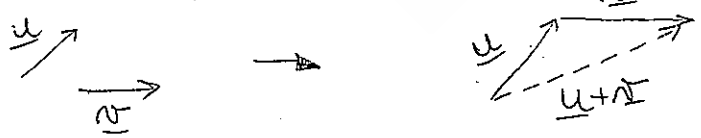
1) SOMMA

- regola del parallelogramma:



Dati due vettori questi vengono trasportati nel loro punto di incontro.

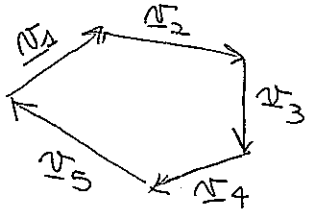
- regola testa-coda.



Viene trasportata la coda di uno sulla testa dell'altro.

2) DIFFERENZA

$$\underline{u} + (-\underline{v}) = \underline{u} - \underline{v}$$



$$\sum \underline{v}_i = 0$$

Se $\underline{v}_m$ coincide con zero allora la risultante è nulla.

3) SCALARE PER VETTORE

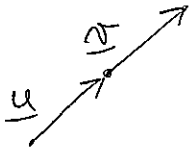
$$c \cdot \underline{u} = \underline{v}$$

↳ il risultato è ancora uno scalare il cui modulo

$$\|\underline{v}\| = |c| \cdot \|\underline{u}\|$$

→ $\underline{v}$ e $\underline{u}$ hanno la stessa direzione.
→ $\underline{v}$ e $\underline{u}$ hanno lo stesso verso se $c>0$.

ES: $c=2$



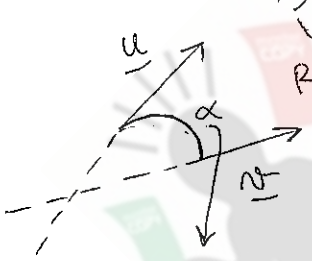
$\underline{F} = m \cdot \underline{a}$ → scalare >0.

4) PRODOTTO SCALARE

si fa tra due vettori e il prodotto è uno scalare.

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = (a) \in \mathbb{R} = \|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\| \cdot \cos\alpha$$

↳ soluzione vera e propria



$\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ se
- $\underline{u} = 0$
- $\underline{v} = 0$
- $\alpha = 90° \rightarrow \cos\alpha = 0$ → $\underline{u} \perp \underline{v}$

generalmente è compreso tra $0°$ e $180°$.

Possiamo usare anche il prodotto scalare per ricavarci il valore di α.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}\right)$$

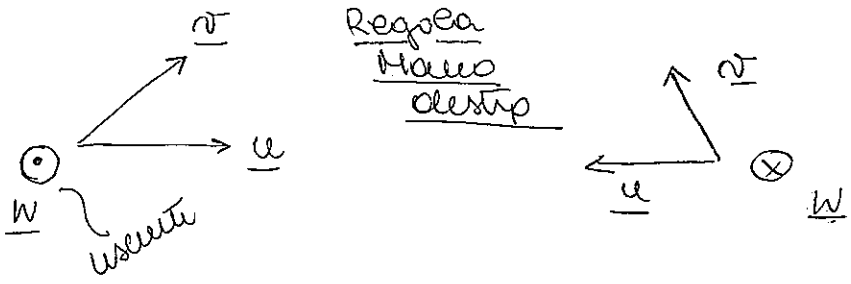
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

5) PRODOTTO VETTORIALE

$$\left.\begin{matrix} \underline{u} \wedge \underline{v} \\ \underline{u} \times \underline{v} \end{matrix}\right\} = (\underline{w})$$

↳ qui la soluzione che otteniamo è il modulo

il prodotto è un vettore il cui modulo è dato da $|N| = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \sin\beta$, il verso e la direzione sono dati dalla REGOLA DELLA MANO DESTRA.



$\underline{u} \wedge \underline{v} = \underline{w}$ → detto vettore

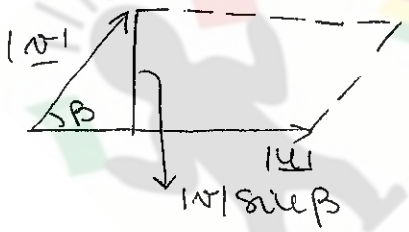
pollice va nella direzione del primo vettore

indice, nella direzione del secondo

$\underline{u} \wedge \underline{v} = -\underline{v} \wedge \underline{u}$ proprietà anticommutativa

$\underline{u} \wedge \underline{v} = 0 \Rightarrow \underline{u} = 0$ oppure $\underline{v} = 0$ oppure $\underline{u} \parallel \underline{v}$

È prodotto vettoriale tra $\underline{u} \wedge \underline{v}$, equivale all'area del parallelogramma:



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

6) PRODOTTO MISTO (TRIPLO)

$(\underline{u} \wedge \underline{v}) \cdot \underline{w} = a \in \mathbb{R}$

↓

$= 0$ solo quando i tre vettori sono complanari.

$\underline{w} \cdot (\underline{u} \wedge \underline{v})$ P. commutativa

$(\underline{v} \wedge \underline{w}) \cdot \underline{u}$
$(\underline{u} \wedge \underline{w}) \cdot \underline{v}$ } P. di circolarità

$\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w})$ P. di inversione del prodotto

4) DOPPIO PRODOTTO VETTORIALE.

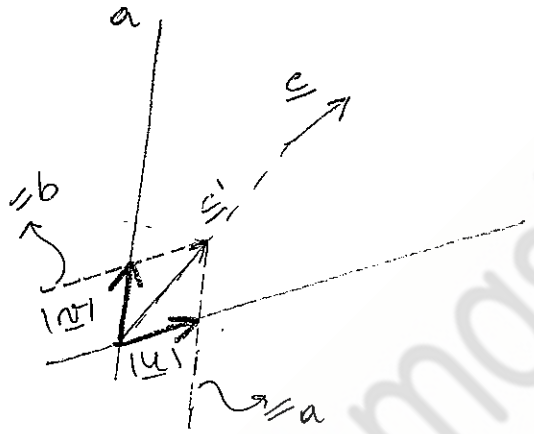
$$\underline{a} \wedge (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}\,(\underline{a}\cdot\underline{c}) - \underline{c}\,(\underline{a}\cdot\underline{b})$$

BAC MINUS CAB

Non vale la proprietà associativa.

$$(\underline{u} \wedge \underline{v}) \wedge \underline{w} \neq \underline{u} \wedge (\underline{v} \wedge \underline{w})$$

DECOMPOSIZIONE VETTORIALE



Dato un vettore $\underline{c}$ e due rette (direzioni) a e b.

↓

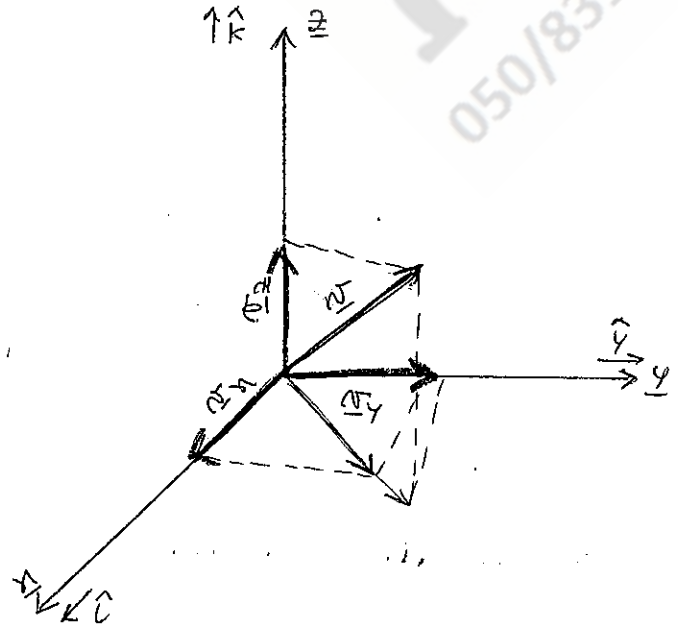
Possiamo decomporre $\underline{c}$ lungo le due sue componenti:

Trasportiamo $\underline{c}$ nel p.to di intersezione tra $\underline{a}$ e $\underline{b}$.

Tracciamo poi a partire dalla testa di $\underline{c}$ le parallele di $\underline{a}$ e b

Nel piano esiste un unica decomposizione.

COMPONENTE CARTESIANA DEL VETTORE



x, y, z terna levogira.

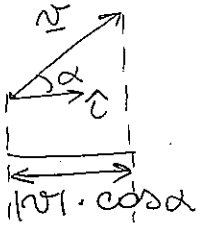
scomposizione $\underline{v}$ nei suoi componenti lungo x, y, z.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$\underline{v}_x, \underline{v}_y, \underline{v}_z$ componenti cartesiani la cui somma ci da il vett $\underline{v}$.

Le componenti cartesiane di $\underline{v}$ sono date da:

$$\begin{cases} \underline{v}_x = \underline{v} \cdot \hat{\imath} \\ \underline{v}_y = \underline{v} \cdot \hat{\jmath} \\ \underline{v}_z = \underline{v} \cdot \hat{k} \end{cases}$$



$\underline{v}_x = |\underline{v}| \cdot |\hat{\imath}| \cdot \cos\alpha$
$= |\underline{v}| \cos\alpha.$

Le componenti di $\underline{v}$ possono essere negative

$$\begin{cases} \underline{v} = \underline{v}_x + \underline{v}_y + \underline{v}_z = \\ \quad = \underline{v}_x \hat{\imath} + \underline{v}_y \hat{\jmath} + \underline{v}_z \hat{k} \end{cases}$$

→ $\underline{v}$ è espresso in termini di VETTORI COMPONENTI

→ $\underline{v}$ è espresso in termini di COMPONENTI CARTESIANE.

Date le componenti di $\underline{v}$ ci possiamo calcolare il modulo:

$$|\underline{v}| = \sqrt{\underline{v}_x^2 + \underline{v}_y^2 + \underline{v}_z^2}$$

↑ attraverso la norma.

*operazioni mediante componenti

$$\boxed{\underline{s} = \underline{u} \pm \underline{v}}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{s}_x \\ \underline{s}_y \\ \underline{s}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{u}_x \\ \underline{u}_y \\ \underline{u}_z \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} \underline{v}_x \\ \underline{v}_y \\ \underline{v}_z \end{bmatrix}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$$\boxed{\underline{s} = c \cdot \underline{u}}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{s}_x \\ \underline{s}_y \\ \underline{s}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \cdot \underline{u}_x \\ c \cdot \underline{u}_y \\ c \cdot \underline{u}_z \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}_x \\ \underline{u}_y \\ \underline{u}_z \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u}^T \cdot \underline{v}}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{u}_x & \underline{u}_y & \underline{u}_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{v}_x \\ \underline{v}_y \\ \underline{v}_z \end{bmatrix} = \underline{u}_x \underline{v}_x + \underline{u}_y \cdot \underline{v}_y + \underline{u}_z \cdot \underline{v}_z$$